

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare județeană

Proba E. c) Matematică *M_șt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I

(30 puncte)

1.	Avem $a_2 + a_6 = a_1 + r + a_1 + 5r = 2a_1 + 6r$ Din $2a_1 + 6r = 26 \Rightarrow a_1 + 3r = 13$ $a_4 = a_1 + 3r = 13$. Sau $a_4 = \frac{a_2 + a_6}{2} = 13$.	2p
2.	$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 2 = x^2 - 6 + 2 = x^2 - 4$ $y = 0, x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$ Se obțin punctele de coordonate $A(-2,0)$ și $B(2,0)$.	3p
3.	$2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$ Notând $2^x = t > 0 \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0$ Se obține $t_1 = \frac{1}{2}$, de unde $2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$ și $t_2 = 2$, de unde $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.	2p
4.	Se pot forma $C_5^3 = 10$ echipe de câte 3 biologi și $C_3^2 = 3$ echipe de câte 2 chimiști. Se pot forma echipe de câte 5 cercetători în număr de $C_5^3 \cdot C_3^2 = 30$ moduri.	3p
5.	Din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ se obține $ \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Pentru $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ avem $\cos x = -\sqrt{1 - (\frac{2}{3})^2} = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ Avem $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.	3p
6.	Fie AD înălțime în triunghiul isoscel ABC , atunci AD este mediană, iar în triunghiul ADB dreptunghic, avem $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 8$. Aria triunghiului este $S_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = 48$ (sau se determină cu formula lui Heron). Din $S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$ se obține $R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{25}{4}$. Sau din teorema sinusului: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$ și $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{24}{25} \Rightarrow R = \frac{25}{4}$.	2p

Subiectul II

(30 puncte)

1. a)	calcul direct: $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ $A^2 + 2A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$ Sau Avem urma, respectiv determinantul lui A : $\operatorname{Tr}(A) = -2$ și $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -2$. Din teorema Hamilton-Cayley, $A^2 - \operatorname{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2$, se obține relația.	2p
		3p

b)	$A - xI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x & 6 \\ -1 & -4-x \end{pmatrix}$ și $\det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 2-x & 6 \\ -1 & -4-x \end{vmatrix} = x^2 + 2x - 2$	3p
	Din $x^2 + 2x - 2 = 0$ (ecuația caracteristică) se obține $x_1 = -1 - \sqrt{3}$ și $x_2 = -1 + \sqrt{3}$.	2p
c)	$B(a) = A + bI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+a & 6 \\ -1 & -4+a \end{pmatrix}$ și determină $B^2(a) = \begin{pmatrix} a^2 + 4a - 2 & 12a - 12 \\ -2a + 2 & a^2 - 8a + 10 \end{pmatrix}$ Sau $B^2(a) = (A + aI_2)^2 = A^2 + 2aAI_2 + a^2I_2$ și utilizând $A^2 = -2A + 2I_2$, se obține $B^2(a) = (2a - 2)A + (a^2 + 2)I_2$	3p
	Din $\begin{pmatrix} a^2 + 4a - 2 & 12a - 12 \\ -2a + 2 & a^2 - 8a + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ se obține $a = 1$. Sau din $(2a - 2)A + (a^2 + 2)I_2 = 3I_2$ se obține $a = 1$.	2p
2. a)	Fie $x, y \in (2, \infty)$, atunci $(x - 2)(y - 2) + 2 = xy - 2x - 2y + 4 + 2$	3p
	$xy - 2(x + y) + 6 = x \circ y$. Sau $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6 = xy - 2x - 2y + 4 + 2$ $= x(y - 2) - 2(y - 2) + 2 = (x - 2)(y - 2) + 2$.	2p
b)	Element neutru: $\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se obține $e = 3 \in (2, \infty)$.	2p
	Elemente simetrizabile: $x \in (2, \infty)$ simetrizabil dacă $\exists x' \in (2, \infty)$ a.î. $x \circ x' = x' \circ x = 3$, se obține $x' = \frac{2x-3}{x-2} \in (2, \infty)$, $\forall x > 2$, $\frac{2x-3}{x-2} > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} > 0$, $\forall x > 2$. Mulțimea elementelor simetrizabile este $(2, \infty)$.	3p
c)	Legea de compoziție este asociativă și folosind punctul a), se obține $x \circ x \circ x = (x \circ x) \circ x = ((x - 2)(x - 2) + 2) \circ x = ((x - 2)^2 + 2 - 2)(x - 2) = (x - 2)^3 + 2$	3p
	$(x - 2)^3 + 2 = 29 \Leftrightarrow (x - 2)^3 = 27 \Rightarrow x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5 \in (2, \infty)$. Sau $x \circ x \circ x = (x \circ x) \circ x = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$ $x^3 - 6x^2 + 12x - 6 = 29 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 35 = 0$ cu soluția $x = 5 \in (2, \infty)$.	2p

Subiectul III

(30 puncte)

1. a)	$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 2x - 6}{x - 3} \right)' = \frac{(x^2 + 2x - 6)'(x - 3) - (x^2 + 2x - 6)(x - 3)'}{(x - 3)^2} =$	3p
	$= \frac{x^2 - 6x}{(x - 3)^2} = \frac{x(x - 6)}{(x - 3)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.	2p
b)	Pentru asimptotă orizontală: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 6}{x - 3} = +\infty \notin \mathbb{R}$, adică graficul funcției f nu admite asimptotă orizontală la $+\infty$.	2p
	Căutăm asimptotă oblică $y = mx + n$ $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 6}{x^2 - 3x} = 1 \in \mathbb{R}^*$ $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 6}{x - 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 6}{x - 3} = 5 \in \mathbb{R}$ Se obține $y = x + 5$ ecuația asimptotei oblice la $+\infty$. Sau $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 6}{x - 3} = x + 5 + \frac{9}{x - 3}$, de unde asimptotă oblică la $+\infty$: $y = x + 5$	3p
c)	$f'(x) = \frac{x(x - 6)}{(x - 3)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x - 6) = 0$ cu soluțiile $x_1 = 0, x_2 = 6$.	2p

	Din tabelul cu semnul derivatei, avem că $x_1 = 0$, geometric $A(0,2)$ este punct de maxim și $x_2 = 6$, geometric $B(6,14)$ este punct de minim. Pentru $x > 3$ avem $f(x) \geq 14$.	3p
2. a)	$\int_1^2 \frac{1 + \ln x}{x} \cdot f(x) dx = \int_1^2 \frac{1 + \ln x}{x} \cdot \frac{1}{x(1 + \ln x)} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx =$	2p
	$= \int_1^2 x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Big _1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$	3p
b)	Fie F o primitivă a lui f , atunci F derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in [1, \infty)$ $F'(x) = f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)} > 0, \forall x \in (1, \infty).$	3p
	Se obține că $F: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este strict crescătoare pe $(1, \infty)$.	2p
c)	$\int_1^a f(x) dx = \int_1^a \frac{1}{x(1 + \ln x)} dx = \int_1^a \frac{(1 + \ln x)'}{1 + \ln x} dx = \ln(1 + \ln x) \Big _1^a =$ $= \ln(1 + \ln a) - \ln(1 + \ln 1) = \ln(1 + \ln a)$	3p
	$\ln(1 + \ln a) = \ln 2 \Rightarrow 1 + \ln a = 2 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = e \in [1, \infty)$	2p